Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) – Continuité

Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche : *(cliquez sur l'exercice pour un accès direct)*

- **Exercice 1 :** appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$
- **Exercice 2 :** appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$
- **Exercice 3 :** appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- **Exercice 4 :** montrer qu'une équation admet au moins une solution grâce au TVI
- **Exercice 5 :** montrer que toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle
- **Exercice 6 :** utiliser le TVI pour montrer l'existence de solutions d'une équation dans un intervalle
- **Exercice 7 :** montrer qu'une équation admet une unique solution dans un intervalle grâce au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (corollaire du TVI)
- **Exercice 8 :** lire un tableau de variations et appliquer le corollaire du TVI pour déterminer le nombre exact de solutions d'une équation
- **Exercice 9 :** utiliser la monotonie d'une fonction pour approximer un nombre de solutions
- **Exercice 10 :** utiliser une variante du corollaire du TVI pour écrire un algorithme d'encadrement par dichotomie

Accès direct au site www.sos-devoirs-corriges.com

Exercice 1 *(3 questions)* *Niveau : facile*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$.

1) Montrer que la fonction f est continue sur $[-1\,;2]$.
2) Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
3) En déduire que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans $[-1\,;2]$.

Correction de l'exercice 1 ↻ *Retour au menu*

1) Montrons que la fonction f est continue sur $[-1\,;2]$.

Rappel : Continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur I et soit $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si f a une limite en a égale à $f(a)$, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Rappel : Continuité d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur I et soit $a \in I$.

f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point a de I.

Remarque : Les fonctions polynômes, homographiques, rationnelles, sinus, cosinus, exponentielle, racine carrée sont des fonctions continues sur leur ensemble de définition respectif.

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est **continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1\,;2]$** $\subset \mathbb{R}$.

2) Calculons $f(-1)$ et $f(2)$.

D'une part, $\boldsymbol{f(-1)} = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = \mathbf{1}$. D'autre part, $\boldsymbol{f(2)} = 2^3 + 2^2 - 2 = \mathbf{10}$.

3) Montrons que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1\,;2]$.

Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) sur un intervalle fermé borné

Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle fermé borné $[a\,;b]$ (a et b réels tels que $a < b$). Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe <u>au moins</u> un réel α compris entre a et b tel que $f(\alpha) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.

D'une part, f est continue sur $[-1\,;2]$ (d'après la première question). D'autre part, comme $5 \in [f(-1)\,;f(2)] = [1\,;10]$ (d'après la deuxième question), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que **l'équation $\boldsymbol{f(x) = 5}$ admet au moins une solution dans $[-1\,;2]$**.

Exercice 2 *(3 questions)* *Niveau : facile*

Soit la fonction f définie sur $]2\,;5]$ par $f(x)=\frac{1}{x-2}$.

1) Montrer que la fonction f est continue sur $]2\,;5]$.
2) Calculer $f(5)$ et déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.
3) En déduire que l'équation $f(x)=10^{2013}$ admet au moins une solution dans $]2\,;5]$.

Correction de l'exercice 2 *↻ Retour au menu*

1) Montrons que la fonction f est continue sur $]2\,;5]$.

La fonction f est une fonction homographique, donc elle est **continue sur son ensemble de définition, à savoir sur $]2\,;5]$**.

2) Calculons $f(5)$ et déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

D'une part, $\boldsymbol{f(5)}=\frac{1}{5-2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$.

Rappel : Limite d'une fonction composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle J et soit v une fonction définie sur un intervalle I, telle que $v(x)\in J$. La fonction f définie sur I par $f(x)=u\big(v(x)\big)$ (ou $f(x)=(u\circ v)(x)$) est la fonction composée de la fonction v suivie de la fonction u.

a, b et c désignent chacun soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} v(x)=b$ et si $\lim\limits_{X\to b} u(X)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x-2)=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}}\frac{1}{X}=+\infty$ donc, par composition des limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \boldsymbol{f(x)}=+\infty$.

3) Montrons que l'équation $f(x)=10^{2013}$ admet au moins une solution dans $]2\,;5]$.

Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) sur un intervalle semi-ouvert

Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle semi-ouvert $[a\,;b[$ (respectivement $]a\,;b]$ avec a et b bornes finies ou infinies telles que $a<b$). Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ (respectivement entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $f(b)$), il existe <u>au moins</u> un réel $\alpha\in[a\,;b[$ (respectivement $\alpha\in]a\,;b]$) tel que $f(\alpha)=k$. Autrement dit, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a\,;b[$(respectivement dans $]a\,;b]$).

D'une part, f est continue sur $]2\,;5]$ (d'après la première question).

D'autre part, $10^{2013} \in \left[f(5);\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)\right[= \left[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ (d'après la deuxième question).

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $\boldsymbol{f(x) = 10^{2013}}$ admet au moins une solution dans** $]\mathbf{2}\,;\mathbf{5}]$.

Exercice 3 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Montrer que l'équation $\frac{2x^3-1}{3x^2+1} = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3

↻ *Retour au menu*

Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) sur un intervalle ouvert

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$ (avec a et b bornes finies ou infinies telles que $a < b$). Alors, pour tout réel k compris entre $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$, il existe au moins un réel $\alpha \in \,]a\,;b[$ tel que $f(\alpha) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $]a\,;b[$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3-1}{3x^2+1}$. Cette fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+1 > 0$. De plus, étant rationnelle, cette fonction est continue sur son ensemble de définition. Autrement dit, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Déterminons désormais les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

Rappel : Limite en $-\infty$ et limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle

Soient $a_n \in \mathbb{R}^*$, $b_m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Autrement dit, la limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du quotient de ses monômes de plus haut degré.

D'une part, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-1}{3x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

Ainsi, $f(]-\infty\,;\,+\infty[) = \,]-\infty\,;\,+\infty[$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Or, $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle. Autrement dit, **l'équation $\frac{2x^3-1}{3x^2+1} = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.**

Exercice 4 *(2 questions)* *Niveau : moyen*

1) Démontrer que l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.
2) Donner une solution exacte de l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ dans $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 4 *↻ Retour au menu*

1) Montrons que l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ admet au moins une solution dans $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

L'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ équivaut à $\cos(2x) - 2\sin(x) = -2$, c'est-à-dire à $f(x) = -2$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \underbrace{\cos(2x)}_{u(x)} - \underbrace{2\sin(x)}_{v(x)}$.

f est la différence de la fonction $u: x \mapsto \cos(2x)$ et de la fonction $v: x \mapsto 2\sin(x)$. Or, u est la composée de la fonction linéaire $x \mapsto 2x$, continue sur $\mathbb{R}$, par la fonction cosinus, continue sur $\mathbb{R}$. Par composition de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, u est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, v est le produit du réel 2 par la fonction sinus, continue sur $\mathbb{R}$. Par produit, v est continue sur $\mathbb{R}$. Finalement, étant la différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, d'une part, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ et, d'autre part, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \times \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2 \times 1 = -3$.

Or, $-2 \in \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) ; f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \left[-3 ; \frac{3}{2}\right]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet au moins une solution dans $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Autrement dit, **l'équation $\boldsymbol{\cos(2x) = 2\sin(x) - 2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\boldsymbol{\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]}$.**

2) Donnons une solution de l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ dans $\left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(x) = 2\sin(x) - 2$

$\Leftrightarrow 2\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$

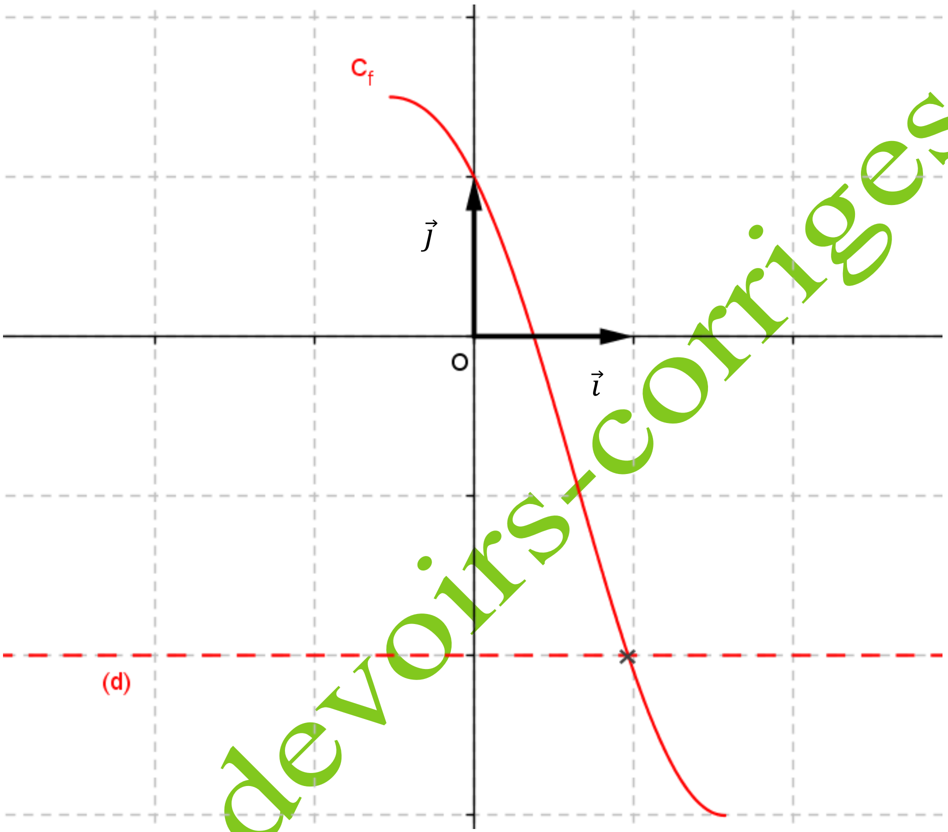
En posant $X = \sin(x)$ et en notant que $-1 \leq X \leq 1$ (puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$), alors l'équation $2\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$ équivaut à $2X^2 + 2X - 3 = 0$.

Posons Δ le discriminant du trinôme $2X^2 + 2X - 3$. Alors $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 28$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet *potentiellement* deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{-2-\sqrt{28}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{7}}{4} = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \qquad X_2 = \frac{-2+\sqrt{28}}{2\times 2} = \frac{-2+2\sqrt{7}}{4} = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$$

Or, comme $-1 \leq X \leq 1$, $X_1 < -1$ et $-1 \leq X_2 \leq 1$, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $2\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{-1+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x = \sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right) \approx 0,97}$ (***arrondi* à $\mathbf{10^{-2}}$ *près par excès***).

Représentation de la fonction f et de la droite d'équation $y = -2$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan :



Exercice 5 ***(1 question)*** ***Niveau : moyen***

Montrer que toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Correction de l'exercice 5 *↻ Retour au menu*

Rappel : Fonction polynôme

On appelle fonction polynôme (à coefficients réels) toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels $a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ tels que :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 \ (a_n \neq 0\ ;\ n \in \mathbb{N})$$

$a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ désignent les **coefficients** du polynôme et n désigne son **degré**.

Soit f une fonction polynôme de degré impair, définie sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction polynôme étant continue sur son ensemble de définition, il vient que f est continue sur $\mathbb{R}$.

En outre, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = \begin{cases} -\infty \ si\ a_n > 0 \\ +\infty \ si\ a_n < 0 \end{cases}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty \ si\ a_n > 0 \\ -\infty \ si\ a_n < 0 \end{cases}$.

Autrement dit,

- ✓ si $a_n > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ✓ si $a_n < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Ainsi, par disjonction des cas, $f(]-\infty\ ;\ +\infty[) =]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Or, $0 \in]-\infty\ ;\ +\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, **toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle**.

Exercice 6 *(1 question)* *Niveau : moyen*

Soit f une fonction définie et continue sur $[0\,;1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$. Démontrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in [0\,;1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Correction de l'exercice 6 *↻ Retour au menu*

Notons g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

Tout d'abord, g est la différence de la fonction f, continue sur $[0\,;1]$, et de la fonction linéaire $x \mapsto x$, continue sur $[0\,;1]$; par conséquent, g est continue sur $[0\,;1]$.

Ensuite, $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Or, d'après l'énoncé, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$. Ainsi, il vient que $0 \leq f(0) \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq g(0)$.

Enfin, $g(1) = f(1) - 1$. Or, d'après l'énoncé, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$. Ainsi, il résulte que $-1 \leq f(1) - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $g(1) \leq 0$.

Or, $0 \in [g(1)\,; g(0)]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[0\,;1]$. Autrement dit, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution α dans $[0\,;1]$, c'est-à-dire **il existe au moins un réel $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}\,;\mathbf{1}]$ tel que $\boldsymbol{f(\alpha) = \alpha}$**.

Exercice 7 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 + 4x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement 3 solutions réelles.

Correction de l'exercice 7

↻ *Retour au menu*

Rappel : Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (aussi appelé théorème de bijection)

Soit f est une fonction <u>continue et strictement monotone</u> (c'est-à-dire soit strictement croissante soit strictement décroissante) sur un intervalle I de bornes a et b (finies ou infinies).

Alors, pour tout réel k strictement compris entre les limites de f en a et en b, il existe <u>un unique</u> réel α de I tel que $f(\alpha) = k$.

Monotonie de f / Intervalle I	f croissante	f décroissante
$[a\,;b]$	$[f(a)\,;f(b)]$	$[f(b)\,;f(a)]$
$[a\,;b[$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x)\,;f(a)\right]$
$]a\,;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x)\,;f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a\,;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

La fonction f est une fonction polynôme (de degré 3) donc elle dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur ce même intervalle, f est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -9x^2 + 4 = 4 - 9x^2 = (2-3x)(2+3x)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 3x = 0 \ ou\ 2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \ ou\ x = -\frac{2}{3}$

Par conséquent, pour tout $x \in \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$, $f'(x) \leq 0$. Il en découle que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$. D'autre part, pour tout $x \in \left[-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$, $f'(x) \geq 0$. Il en résulte que f est strictement croissante sur $\left[-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$.

✓ Etudions les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans $\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]$.

D'une part, sur $\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]$, f est continue et strictement décroissante.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^3) = -3\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{7}{9}$.

Comme $\frac{1}{2} \in f\left(\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]\right) = \left[f\left(-\frac{2}{3}\right)\,;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= \left[-\frac{7}{9}\,;+\infty\right[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]$.

✓ Etudions les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans $\left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right[$.

D'une part, sur $\left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right[$, f est continue et strictement croissante.

D'autre part, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{9}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{25}{9}$

Comme $\frac{1}{2} \in f\left(\left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right[\right) = \left]f\left(-\frac{2}{3}\right)\ ;\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right[= \left]-\frac{7}{9}\ ;\ \frac{25}{9}\right[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $\left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right[$.

✓ Etudions les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans $\left[\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

D'une part, sur $\left[\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$, f est continue et strictement décroissante.

D'autre part, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{25}{9}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3) = -3\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = -\infty$

Comme $\frac{1}{2} \in f\left(\left[\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[\right) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \left]-\infty\ ;\ \frac{25}{9}\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ dans $\left[\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

✓ Concluons.

Finalement, **l'équation $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}}$ admet exactement 3 solutions réelles**.

Remarque importante : Alors que le théorème des valeurs intermédiaires permet de prouver l'existence d'au moins une solution sur un intervalle, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet de prouver l'unicité d'une solution sur un intervalle.

Exercice 8 *(3 questions)* *Niveau : moyen*

Ci-après figure le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

1) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.
2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$.

Correction de l'exercice 8 *↻ Retour au menu*

Rappelons tout d'abord que, par convention, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle. Déterminons désormais le nombre de solutions de chaque équation proposée.

1) Déterminons tout d'abord le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Sur $]-\infty\,;0]$, la fonction f est continue et strictement croissante et $f(]-\infty\,;0]) =]-2\,;4]$. Or, $3 \in]-2\,;4]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;0]$.

Sur $]0\,;2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f(]0\,;2[) =]-\infty\,;\,4[$. Or, $3 \in]-\infty\,;\,4[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $]0\,;2[$.

Sur $]2\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f(]2\,;+\infty[) =]0\,;+\infty[$. Comme $3 \in]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $]2\,;+\infty[$, en vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Finalement, **l'équation $f(x) = 3$ admet exactement trois solutions réelles**.

2) Déterminons ensuite le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Sur $]-\infty\,;0]$, la fonction f est continue et strictement croissante et $f(]-\infty\,;0]) =]-2\,;4]$. Or, $0 \in]-2\,;4]$ donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet pas une unique solution dans $]-\infty\,;0]$.

Sur $]0\,;2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f(]0\,;2[) =]-\infty\,;\,4[$. Or, $0 \in]-\infty\,;\,4[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;2[$.

Sur $]2\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f(]2\,;+\infty[) =]0\,;+\infty[$. Comme $0 \notin]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]2\,;+\infty[$.

Finalement, **l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet deux solutions réelles et deux seules, l'une dans $\boldsymbol{]-\infty\,;0]}$ et l'autre dans $\boldsymbol{]0\,;2[}$.**

3) Enfin, déterminons le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$.

Sur $]-\infty\,;0]$, la fonction f est continue et strictement croissante et $f(]-\infty\,;0]) =]-2\,;4]$. Or, $-2 \notin]-2\,;4]$ donc l'équation $f(x) = -2$ n'admet pas de solution dans $]-\infty\,;0]$.

Sur $]0\,;2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f(]0\,;2[) =]-\infty\,;\,4[$. Or, $-2 \in]-\infty\,;\,4[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $]0\,;2[$.

Sur $]2\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f(]2\,;+\infty[) =]0\,;+\infty[$. Comme $-2 \notin]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = -2$ n'admet pas de solution dans $]2\,;+\infty[$.

Finalement, **l'équation $\boldsymbol{f(x) = -2}$ admet une unique solution réelle, en l'occurrence dans $\boldsymbol{]0\,;2[}$.**

Exercice 9 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Soit une fonction f strictement décroissante sur $[2\,;5]$ telle que $f(2) = 4$ et $f(5) = -3$. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle :

a) une solution ?
b) aucune solution ?
c) au moins une solution ?
d) au plus une solution ?

Correction de l'exercice 9 — *↻ Retour au menu*

f est une fonction strictement décroissante sur $[2\,;5]$ donc 0 admet au plus un antécédent par f. La réponse c) est donc exclue.

Comme, d'après l'énoncé, f n'est pas supposée continue, l'équation $f(x) = 0$ peut n'admettre aucune solution. Il vient donc que la réponse juste est la réponse d).

Exercice 10 ***(2 questions)*** ***Niveau : difficile***

1) Montrer que l'équation $x^2 = x\sin x + \cos x$ admet deux solutions réelles.
2) Ecrire un algorithme avec AlgoBox permettant d'obtenir un encadrement de chaque solution avec une amplitude de 10^{-3}.

Correction de l'exercice 10 *↻ Retour au menu*

1) Montrons que l'équation $x^2 = x\sin x + \cos x$ admet deux solutions réelles.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$.

f est continue et dérivable comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - (1\sin x + x\cos x) - (-\sin x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = 2x - x\cos x = x(2 - \cos x)$

Or, pour tout x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$, d'où $1 \leq -\cos x + 2 \leq 3$ (par décroissance de la fonction $x \mapsto -x + 2$). Par conséquent, comme $2 - \cos x > 0$ pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de x. Autrement dit, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$ et $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \leq 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

✓ Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $]-\infty\,;\,0]$.

D'une part, par continuité de la fonction f en 0, $f(0) = 0^2 - 0\sin 0 - \cos 0 = -1$.

D'autre part, pour tout x réel non nul, $f(x) = x^2\left(1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right)$. Or, $|\sin x| \leq 1$ et $|\cos x| \leq 1$, d'où les résultats suivants, en multipliant respectivement par $\left|\frac{1}{x}\right| > 0$ et $\left|\frac{1}{x^2}\right| > 0$: $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ et $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2}\right|$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$ (par composition des limites), il vient d'après le théorème des limites par encadrement que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

De même, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|\frac{1}{x^2}\right| = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$, il vient d'après le théorème des limites par encadrement que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$.

Finalement, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right) = 1$. Comme enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, par produit des limites, il résulte que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

On vient de montrer que, sur $]-\infty\,;\,0]$, f est non seulement continue et strictement décroissante mais aussi que $f(]-\infty\,;\,0]) = \left[f(0)\,;\,\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-1\,;\,+\infty[$. Par conséquent, comme $0 \in [-1\,;\,+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $\alpha \in]-\infty\,;\,0]$.**

- ✓ Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution dans $[0\,;\,+\infty[$ en utilisant la même méthode que précédemment.

On a montré d'une part que $f(0)=-1$ et d'autre part que $f(x)=x^2\left(1-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}\right)$, pour tout x réel non nul. Comme $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\left|\frac{1}{x}\right|$ et $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leq\left|\frac{1}{x^2}\right|$ et comme $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x^2}\right|=0$, il vient, en utilisant le théorème des limites par encadrement, que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$. Finalement, par somme puis par produit des limites, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

On vient de montrer que, sur $[0\,;\,+\infty[$, f est non seulement continue et strictement croissante mais aussi que $f([0\,;\,+\infty[)=\left[f(0)\,;\,\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=[-1\,;\,+\infty[$. Par conséquent, comme $0\in[-1\,;\,+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $\boldsymbol{f(x)=0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\beta}$ telle que $\boldsymbol{\beta\in[0\,;\,+\infty[}$.**

En définitive, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions et deux seules (l'une négative et l'autre positive), notées α et β. Autrement dit, **l'équation $\boldsymbol{x^2=x\sin x+\cos x}$ admet deux solutions $\boldsymbol{\alpha\in\mathbb{R}_-}$ et $\boldsymbol{\beta\in\mathbb{R}_+}$.**

2) Ecrivons un algorithme avec AlgoBox permettant d'obtenir une valeur approchée de α et β à 10^{-3} près.

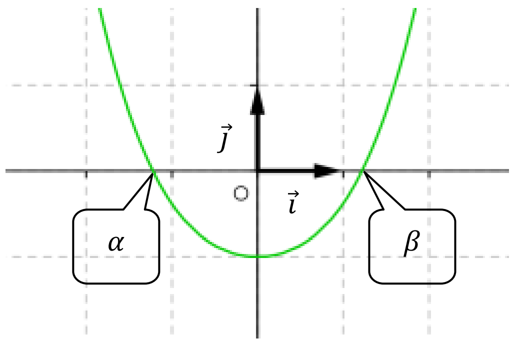
Rappel : Variante du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (variante du théorème de bijection)

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de bornes a et b (finies ou infinies) et si $f(a)f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans I.

Explications : Appuyons-nous sur la variante du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ci-dessus.

- ✓ Pour commencer, on détermine un intervalle $[borne_{inférieure}\,;borne_{supérieure}]$ contenant l'une des solutions de l'équation $f(x)=0$ avec $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$.
- ✓ On calcule alors le *milieu* de l'intervalle $[borne_{inférieure}\,;borne_{supérieure}]$ puis, parmi les intervalles $[borne_{inférieure}\,;\,milieu]$ ou $[milieu\,;borne_{supérieure}]$, on détermine celui auquel appartient la solution de l'équation $f(x)=0$. En effet, si $f(milieu)$ et $f(borne_{supérieure})$ sont de même signe, c'est que la solution se trouve dans l'intervalle $[borne_{inférieure}\,;\,milieu]$ et, dans ce cas, on affecte à $borne_{supérieure}$ la valeur de $milieu$.
- ✓ On réitère la démarche en faisant jouer à la variante $milieu$ le rôle de $borne_{inférieure}$ ou de $borne_{supérieure}$ selon l'intervalle retenu, jusqu'à obtenir la précision demandée.

Remarque : L'intervalle initial $[borne_{inférieure}\,;borne_{supérieure}]$ peut être choisi après avoir représenté la fonction f dans un repère. Ci-contre est représentée la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan.



Algorithme écrit avec le logiciel AlgoBox

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=pow(x,2)-x*sin(x)-cos(x)

```
VARIABLES
  precision EST_DU_TYPE NOMBRE
  borne_inferieure EST_DU_TYPE NOMBRE
  borne_superieure EST_DU_TYPE NOMBRE
  milieu EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Indiquer la précision désirée : "
  LIRE precision
  AFFICHER precision
  AFFICHER "Indiquer la borne inférieure : "
  LIRE borne_inferieure
  AFFICHER borne_inferieure
  AFFICHER "Indiquer la borne supérieure : "
  LIRE borne_superieure
  AFFICHER borne_superieure
  TANT_QUE (borne_superieure-borne_inferieure>precision) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    milieu PREND_LA_VALEUR (borne_inferieure+borne_superieure)/2
    SI (F1(milieu)*F1(borne_superieure)>0) ALORS
      DEBUT_SI
      borne_superieure PREND_LA_VALEUR milieu
      FIN_SI
      SINON
       DEBUT_SINON
       borne_inferieure PREND_LA_VALEUR milieu
       FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER borne_inferieure
  AFFICHER " < solution < "
  AFFICHER borne_superieure
FIN_ALGORITHME
```

Affichages obtenus après lancement du logiciel AlgoBox

Recherche d'un encadrement de α ($\alpha \in \mathbb{R}^-$)

Algorithme lancé
Indiquer la précision désirée : 0.001
Indiquer la borne inférieure : -2
Indiquer la borne supérieure : -1
-1.2207031 < solution < -1.2197266
Algorithme terminé

Recherche d'un encadrement de β ($\beta \in \mathbb{R}^+$)

Algorithme lancé
Indiquer la précision désirée : 0.001
Indiquer la borne inférieure : 1
Indiquer la borne supérieure : 2
1.2197266 < solution < 1.2207031
Algorithme terminé

Remarque : La fonction f est une fonction paire puisque son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et puisque, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. Aussi, du fait de la parité de la fonction f, les solutions α et β sont opposées. Il suffisait donc de rechercher un encadrement de la solution α de $\mathbb{R}^-$ pour en déduire un encadrement de la solution β de $\mathbb{R}^+$ (ou vice versa).